

Sobre el conjunto de umbrales sostenibles

On the Set of Sustainable Thresholds

Pedro Gajardo¹

¹ *Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile*

Fecha de recepción del manuscrito: 12/07/2021

Fecha de aceptación del manuscrito: 19/08/2021

Fecha de publicación: 31/08/2021

Resumen— Hacer operativo el concepto de sostenibilidad es un desafío importante en la gestión de recursos naturales, problemas de conservación de la biodiversidad, el cambio climático y la epidemiología, entre otros. Diferentes enfoques se han propuesto, basados en restricciones y umbrales que consideran no sobrepasar indicadores biológicos, ecológicos, económicos o sociales como metas para los objetivos de una gestión sostenible. Cuando las restricciones inducidas por umbrales deben satisfacerse a lo largo del tiempo, estos problemas pueden formularse en el marco matemático de la *teoría de la viabilidad*, como han propuesto numerosos autores durante las últimas décadas. El eje central de estos enfoques ha sido principalmente el cálculo del *núcleo de viabilidad*, concepto clave en la mencionada teoría, que consiste en el conjunto de estados iniciales del sistema a partir del cual es posible satisfacer las restricciones prescritas a lo largo del tiempo. Nuestro enfoque en los últimos años ha sido en el sentido inverso, consistente en determinar los umbrales para los que existe una trayectoria que satisface las restricciones parametrizadas por dichos umbrales, a partir del estado actual de un sistema. El conjunto de todos estos umbrales se denomina *conjunto de umbrales sostenibles*, que corresponde al operador inverso del núcleo de viabilidad. Este nuevo concepto, y su cálculo, proporciona una herramienta para la gestión y visualización de múltiples objetivos relacionados con la sostenibilidad que se puede alcanzar, permitiendo observar la (in)compatibilidad y compensaciones entre ellos. En este trabajo revisamos la definición del conjunto de umbrales sostenibles, presentando algunas interpretaciones y un método para calcularlo, resumiendo trabajos recientes desarrollados con varios coautores.

Palabras clave—sostenibilidad, teoría de la viabilidad, umbrales sostenibles, maximin, programación dinámica

Abstract—Operationalizing sustainability is a major challenge in natural resource management, biodiversity conservation problems, the climate change, and epidemiology, among others. Approaches based in constraints and thresholds have been proposed considering not to exceed biological, ecological, economic, or social indicators as goals for sustainable management objectives. Whenever the constraints induced by thresholds have to be satisfied over time, such problems can be formulated into the mathematical framework of *viability theory*, as has been proposed by numerous authors during the last decades. The focus of these approaches, has been mainly the computation of the *viability kernel*, the key concept in the mentioned theory, and consisting in the set of initial states of the system from which is possible to satisfy prescribed constraints along the time. Our approach in the last years has been in the inverse sense, consisting in determining the thresholds for which there exists a trajectory satisfying constraints parametrized by such thresholds. The set of all these thresholds is called the *set of sustainable thresholds*, that corresponds to the inverse operator of the viability kernel. This new concept and its computation, provide a tool for the management and visualization of multiple objectives related to sustainability that can be accomplished, allowing to observe their (in)compatibility and trade-offs. In this paper, we review the definition of the set of sustainable thresholds presenting some interpretations and a method to compute it, summarizing recent works developed with several co-authors.

Keywords—sustainability, viability theory, sustainable thresholds, dynamic programming.

INTRODUCCIÓN

A partir del Informe Brundtland et al. (1987), que proporciona una definición unificadora del desarrollo sostenible, se pueden identificar varios estudios que proponen cómo hacer operativa esa definición en diversos

contextos: Asheim (2007); Cairns y Long (2006); Doyen y Martinet (2012); Fleurbaey (2015), en particular en el de la economía ecológica, ambiental y de los recursos. En esa perspectiva, el enfoque de maximizar una función de utilidad con una tasa de descuento, es calificado como *la dictadura del presente* por Chichilnisky (1996), debido

a que este criterio descuida la utilidad a largo plazo, lo que conlleva a trayectorias insostenibles para las futuras generaciones. Entre los enfoques y criterios alternativos relacionados con la sostenibilidad cuantitativa, se encuentra el maximin Solow (1974), definido como el nivel de utilidad más alto que puede sostenerse en el tiempo, promoviendo así la equidad intergeneracional. Sin embargo, el uso de métodos de optimización para cuantificar la sostenibilidad, incluido el criterio maximin, es criticado globalmente en Howarth (1995); Martinet (2011), donde se argumenta que es necesario imponer condiciones de sostenibilidad antes de la maximización de cualquier función de bienestar social.

En este sentido, la consideración de restricciones biológicas, ecológicas, sociales o físicas para cumplir los objetivos a lo largo del tiempo surge como una cuestión crucial. El enfoque en términos de restricciones y objetivos está bien adaptado para abordar problemas de conservación de la biodiversidad, en los que se suelen preferir las limitaciones ecológicas a las evaluaciones de utilidad o monetarias (véase, por ejemplo, los objetivos de biodiversidad de Aichi, formulados por el Convenio sobre la Diversidad Biológica), o para abordar la cuestión del cambio climático, como ilustra el protocolo de Kioto, en el que los objetivos físicos se definen en términos cuantitativos. En este marco, los puntos de referencia que no deben traspasar los indicadores biológicos, ecológicos, económicos o sociales representan objetivos de gestión sostenible. Como ejemplos de este enfoque, se pueden mencionar el concepto de Estándares Mínimos de Seguridad (SMS) Margolis y Naevdal (2008), donde se introducen umbrales de inflexión y zonas de riesgo, o el Enfoque de Ventanas Tolerables (TWA) Bruckner et al. (1999), basado en límites seguros y regiones de viabilidad. Del mismo modo, en Rockström et al. (2009) desarrollan un marco basado en restricciones que definen el espacio operativo seguro (SOS) para la humanidad, asociado a los subsistemas o procesos biofísicos del planeta.

Con una perspectiva de equidad intergeneracional, si las restricciones inducidas por los puntos de referencia, umbrales, límites, normas o puntos de inflexión deben satisfacerse a lo largo del tiempo, estos problemas relacionados con la sostenibilidad pueden formularse en el marco matemático de la *teoría de la viabilidad* Aubin (1990); De Lara y Doyen (2008); Doyen et al. (2019). Interpretando las restricciones como derechos mínimos que deben garantizarse a todas las generaciones, la teoría de la viabilidad puede utilizarse para abordar estos problemas de sostenibilidad Baumgartner y Quaas (2009); Doyen y Martinet (2012). De hecho, este enfoque ha sido aplicado por numerosos autores a la gestión sostenible de recursos renovables a los que se refieren Béné y Doyen (2000); Béné et al. (2001); Doyen et al. (2017); Krawczyk et al. (2013); Péreau et al. (2012); Péreau et al. (2018). En Oubraham y Zaccour (2018), los autores ofrecen una visión completa de estos estudios, destacando la aplicación de conceptos y herramientas de la teoría de la viabilidad a la gestión sostenible de recursos renovables, incluidos los ecosistemas y las poblaciones, como la pesca y especies no marinas, el medio ambiente y otros recursos.

Los enfoques de maximin y viabilidad están fuertemente

conectados, ya que el maximin surge como una *viabilidad máxima* - Doyen y Gajardo (2020); Doyen y Martinet (2012); Martinet y Doyen (2007) -. Más concretamente, en Doyen y Martinet (2012) se demuestra que la función valor de un problema maximin es la solución de un problema de optimización estático que involucra al núcleo de viabilidad como restricción.

Las aplicaciones tradicionales de la teoría de la viabilidad a la gestión sostenible de recursos naturales (incluyendo aspectos ecológicos, económicos o sociales) se basan en la determinación del llamado *núcleo de viabilidad*, un conjunto formado por las condiciones iniciales de las variables de estado, que aseguran la existencia de al menos una trayectoria (viable) de estados que puede satisfacer las restricciones impuestas que representan la sostenibilidad (ver Baumgartner y Quaas (2009); Béné et al. (2001); Cissé et al. (2013); De Lara y Doyen (2008); Doyen et al. (2017); Doyen y Martinet (2012); Krawczyk et al. (2013); Péreau et al. (2012) y sus referencias). Si el estado actual de los recursos no es viable, es decir, si no hay una trayectoria futura viable capaz de satisfacer las restricciones de sostenibilidad, se sugiere entonces la recuperación de los recursos.

A pesar de las diversas aplicaciones de la teoría de la viabilidad, uno de los inconvenientes del núcleo de viabilidad es que puede contener estados que no son alcanzables desde el estado actual de los recursos a estudiar, lo que hace inútil su cálculo, tarea que, en general, es muy difícil. En lugar del núcleo de viabilidad, en los últimos años hemos propuesto centrarnos en *el conjunto de umbrales sostenibles*, un conjunto de umbrales que parametrizan las restricciones de sostenibilidad que pueden satisfacerse en el futuro, dado el estado actual de los recursos. Este conjunto representará la capacidad (o incapacidad) de los recursos para sostener las restricciones de sostenibilidad especificadas, además de mostrar todas las restricciones que pueden satisfacerse a partir del estado actual, que puede ser muy malo, en caso de que solo puedan sostenerse en el tiempo restricciones muy poco exigentes.

Desde el punto de vista matemático, el uso del núcleo de viabilidad y el del conjunto de umbrales sostenibles son enfoques equivalentes, ya que uno es el mapeo inverso del otro. Sin embargo, para asistir al proceso de toma de decisiones, creemos que el conjunto de umbrales sostenibles es visualmente más atractivo porque contiene más información útil que el núcleo de viabilidad y tiene propiedades matemáticas (no compartidas por el núcleo de viabilidad) que deberían hacer de su cálculo una tarea más abordable.

En el presente artículo, consideraremos un sistema dinámico controlado a tiempo discreto (Sección Definiciones preliminares), donde las variables de estado pueden representar por ejemplo uno o varios recursos naturales, diferentes especies, emisiones, o diversas cantidades de interés que evolucionan en el transcurso del tiempo. El o los controles serán las decisiones exógenas que modifican la evolución del sistema. El objetivo es que tanto las trayectorias de estado y controles satisfagan restricciones, parametrizadas por umbrales, a lo largo del tiempo. En ese contexto,

definiremos el conjunto de umbrales sostenibles y veremos su relación con el núcleo de viabilidad (Sección Núcleo de viabilidad y el conjunto de umbrales sostenibles). Luego presentaremos caracterizaciones que involucran estos objetos, mediante problemas de optimización de tipo maximin (Sección Umbrales sostenibles y maximin), estableciendo un estrecho vínculo entre tal tipo de problemas, estudiados hace mucho tiempo en sostenibilidad cuantitativa, y la teoría de la viabilidad. Finalmente en la Sección Principio de Programación Dinámica presentaremos un resultado que permite diseñar un método numérico, basado en el principio de la programación dinámica, para calcular los umbrales sostenibles eficientes (frontera débil de Pareto), y de esa forma obtener el conjunto completo.

DEFINICIONES PRELIMINARES

El contexto matemático general en el cual se plantea esta revisión, es un sistema dinámico determinista en tiempo discreto, que se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x(t+1) = D(x(t), u(t)) & t_0 \leq t < T \\ x(t_0) = x_0 \text{ dado,} \end{cases} \quad (1)$$

donde $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$ es la variable de estado (e.g., niveles de uno o varios recursos naturales, de diversas especies, o la cantidad de individuos en compartimentos en modelos epidemiológicos), $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ es el control o decisión que afecta la evolución de las variables de estado (e.g., esfuerzo de captura, cosecha, o medidas de mitigación de una enfermedad), $D : X \times U \rightarrow X$ representa la dinámica, $t_0 \in \mathbb{N}$ es el periodo de tiempo inicial en el que se realiza el análisis y $T \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ($T \geq t_0$) es el horizonte de tiempo.

Para simplificar la presentación, consideraremos solo sistemas autónomos, pero todo lo que exponemos es fácilmente extendible a sistemas no-autónomos.

Establecido el sistema dinámico (1), lo que en esencia es un trabajo multidisciplinario que involucra el modelamiento, identificación y estimación de parámetros, nos situaremos en un contexto donde es deseable que las trayectorias de estados y controles satisfagan restricciones a lo largo del periodo de tiempo en estudio. Un ejemplo ilustrativo es el caso en que (1) representa la evolución de un sistema medioambiental sujeto a restricciones de preservación y producción (De Lara y Doyen (2008); Doyen et al. (2017); ICES (2004)). En un contexto general, escribiremos

$$I_j(x(t), u(t)) \geq \theta_j, \quad j = 1, \dots, p; \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

donde para $j = 1, \dots, p$, las funciones $I_j : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ representan indicadores de calidad, métricas u observaciones y $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$ es el vector donde la componente j es el umbral correspondiente a la restricción I_j . De esta forma, el sistema dinámico controlado con restricciones que estudiaremos es

$$\begin{cases} x(t+1) = D(x(t), u(t)) & t_0 \leq t < T \\ x(t_0) = x_0 \text{ dado} \\ I_j(x(t), u(t)) \geq \theta_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad t_0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3)$$

En la literatura de los últimos años, podemos encontrar diversas investigaciones cuyo objeto de estudio se puede escribir de la forma anterior (en tiempo discreto o continuo), y que han sido motivados por la gestión de recursos pesqueros - Cissé et al. (2013); De Lara et al. (2007a); Doyen et al. (2017, 2012); Eisenack et al. (2006); Mullon et al. (2004); Péreau et al. (2012) -, la gestión de recursos forestales - Bernard (2010); Bernard y Martin (2013); Mathias et al. (2015); Rapaport et al. (2006) -, el cambio climático Aubin et al. (2005, 2012), los sistemas agro-ecológicos - Baumgartner y Quaas (2009); Durand et al. (2017); Sabatier et al. (2015), y el control de epidemias Barrios et al. (2018); De Lara y Sepulveda-Salcedo (2016); Sepulveda-Salcedo y De Lara (2019) -.

Al observar el sistema (3), representando este una situación ideal o deseable, la pregunta natural que nos podemos hacer es si existe una trayectoria de controles (decisiones) $u(\cdot) = (u(t_0), u(t_0 + 1), \dots, u(T))$ tal que las restricciones estipuladas en (3) se puedan satisfacer. Evidentemente, la respuesta dependerá del estado inicial del sistema x_0 y de las restricciones que están parametrizadas por el vector de umbrales $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$. La compatibilidad entre ambos objetos, es lo que abordamos en la próxima sección.

NÚCLEO DE VIABILIDAD Y EL CONJUNTO DE UMBRALES SOSTENIBLES

En el contexto del sistema dinámico controlado (3) con restricciones mixtas (de estado y control), la *teoría de la viabilidad* se ha concentrado en analizar y calcular el *núcleo de viabilidad* (ver Aubin (1991)), concepto clave en dicha teoría, y que consiste en el conjunto de condiciones iniciales x_0 para las cuales el sistema (3) es factible, es decir, existe una secuencia de decisiones $u(\cdot)$ que permite satisfacer las restricciones. El núcleo de viabilidad se define entonces por

$$\mathbb{V}_T(t_0, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x_0 \in X \left| \begin{array}{l} \exists u(\cdot) \text{ y } x(\cdot) \text{ satisfaciendo} \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t+1) = D(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U \text{ y} \\ I_j(x(t), u(t)) \geq \theta_j \quad \forall i = 1, \dots, p \\ \forall t_0 \leq t \leq T \end{array} \right. \right\} \quad (4)$$

El núcleo de viabilidad $\mathbb{V}_T(t_0, \theta) \subset X \subset \mathbb{R}^n$, asociado al vector de umbrales $\theta \in \mathbb{R}^p$, juega un rol fundamental (en tiempo discreto y continuo) en el análisis de la consistencia entre un sistema dinámico controlado y las restricciones a las cuales está sujeto, siendo clave también en el diseño de controles viables. Desafortunadamente, su cálculo presenta diversas complejidades.

De la definición del núcleo de viabilidad, se obtiene que si la condición inicial x_0 no está en $\mathbb{V}_T(t_0, \theta)$, entonces independiente de lo que hagamos (i.e., de la secuencia de controles $u(\cdot)$ que se elija), tarde o temprano alguna de las restricciones no será respetada, información relevante cuando se analizan problemas de sostenibilidad.

En la literatura podemos encontrar una gran cantidad de trabajos cuyo foco es la caracterización y el cálculo del núcleo de viabilidad - Aubin et al. (2011); Béné et al. (2001); Bonneuil y Boucekkine (2014); De Lara y Doyen (2008); De Lara et al. (2007b); Krawczyk et al. (2013); Saint-Pierre (1994) -. Recientemente en Oubraham y Zaccour (2018), los autores proveen una exhaustiva revisión sobre la utilización de la teoría de la viabilidad y en particular del núcleo de viabilidad, en el estudio de problemas asociados a la gestión sostenible de recursos renovables, incluyendo ecosistemas y medio ambiente, concluyendo que la teoría de la viabilidad es un marco metodológico muy útil para analizar problemas de sostenibilidad. En Schuhbauer y Sumaila (2016) también se hace una revisión de aplicaciones de la teoría de la viabilidad, pero en dicho trabajo estas se concentran en la gestión de recursos pesqueros.

Menos atención, con la excepción de Doyen y Gajardo (2020); Doyen y Martinet (2012); Gajardo y Hermosilla (2021); Gajardo et al. (2018); Martinet (2011); Martinet et al. (2010), ha recibido el problema de viabilidad inverso, consistente en determinar, dada una condición inicial x_0 , las restricciones parametrizadas por el vector de umbrales $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$, para las cuales el sistema (3) es factible. En términos matemáticos, lo que se busca es determinar el siguiente conjunto

$$\mathcal{S}_T(t_0, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \theta \in \mathbb{R}^p \left| \begin{array}{l} \exists u(\cdot) \text{ y } x(\cdot) \text{ satisfaciendo} \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t+1) = D(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U \text{ y} \\ I_j(x(t), u(t)) \geq \theta_j \\ \forall i = 1, \dots, p \\ \forall t_0 \leq t \leq T \end{array} \right. \right\} \quad (5)$$

El conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^p$ es denominado *conjunto de umbrales sostenibles* a partir del estado inicial x_0 . La definición de este conjunto se puede encontrar en Doyen y Gajardo (2020); Gajardo y Hermosilla (2021); Gajardo et al. (2018); Martinet et al. (2010, 2011) (en tiempo discreto) y en Barrios et al. (2018); Martinet (2011) (en tiempo continuo).

Directamente de las definiciones (4) y (5), el conjunto de umbrales sostenibles puede considerarse como el mapeo inverso del núcleo de viabilidad, en el siguiente sentido

$$\theta \in \mathcal{S}_T(t_0, x_0) \iff x_0 \in \mathbb{V}_T(t_0, \theta) \quad (6)$$

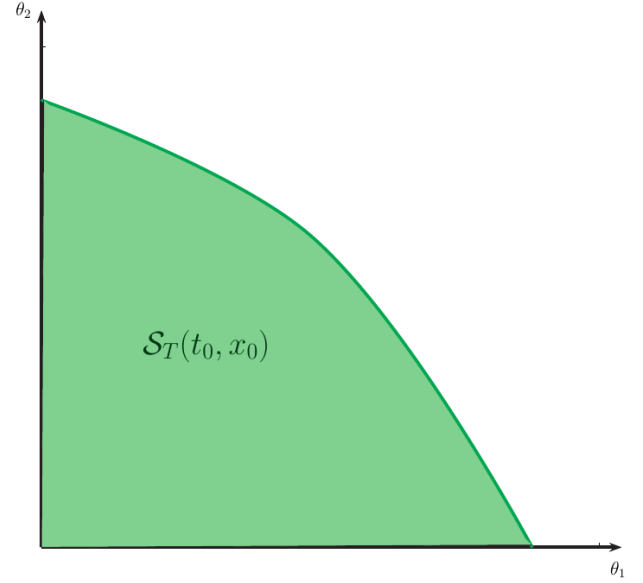


Figura 1: Ilustración tomada de Gajardo et al. (2018) del conjunto de umbrales sostenibles $\mathcal{S}_T(t_0, x_0) \cap \mathbb{R}_+^2$ (i.e., considerando solo restricciones no negativas en (5)).

Similar a lo que sucede con el núcleo de viabilidad, identificar y calcular $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ plantea diversos desafíos. Sin embargo, en muchas situaciones prácticas, el conjunto de umbrales sostenibles visualmente es más interpretable que el núcleo de viabilidad y podría proporcionar una valiosa información cualitativa a los tomadores de decisiones. Por ejemplo, en problemas de gestión de recursos naturales, en los que el estado de los recursos estudiados está representado por varias variables de estado (como en los modelos en clases de edades en la gestión pesquera), el núcleo de viabilidad no puede proporcionar información visual a los tomadores de decisiones que están considerando diversas restricciones. Este caso no se da cuando se tienen pocas restricciones que satisfacer, por ejemplo, dos: una restricción de tipo preservación (e.g., mantener al menos un nivel mínimo del recurso) y una restricción de tipo producción (e.g., mantener al menos un nivel mínimo de cosecha o beneficio). En esta situación, el conjunto de umbrales sostenibles puede ilustrarse en el plano (dos dimensiones asociadas a las dos restricciones) como se muestra en Barrios et al. (2018) y Gajardo et al. (2018). De esta forma, este conjunto representa la buena o mala salud del sistema en estudio en términos de la sostenibilidad, permitiendo visualizar las compensaciones o trade-offs existentes entre las diferentes restricciones, que usualmente están en conflicto, subyacentes en la definición de sostenibilidad. En la Figura 1 ilustramos el conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ con dos restricciones en conflicto, en el sentido de que cuanto más exigentes seamos con una restricción (i.e., imponiendo un umbral más alto), menos exigentes deberíamos ser con la otra restricción (i.e., imponiendo un umbral más bajo). Esto último ocurre muy a menudo en problemas relacionados con la sostenibilidad o más generalmente en problemas sociales.

Durante los últimos años, hemos creído que el conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ entrega información muy relevante sobre la sos-

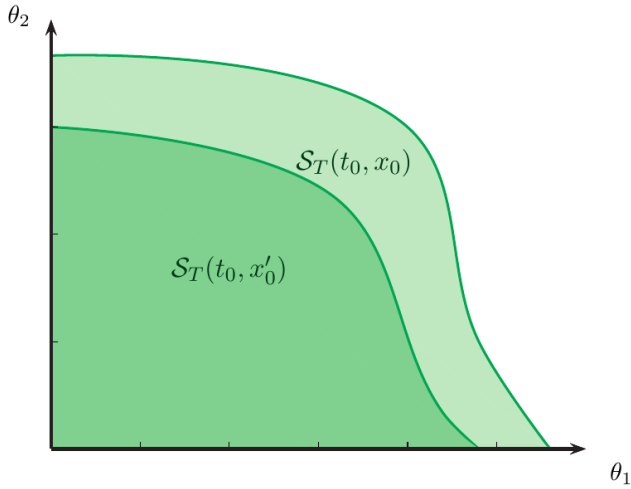


Figura 2: Esquema tomado de Gajardo et al. (2021) del conjunto de umbrales sostenibles para dos estados iniciales diferentes x_0 y x'_0 .

tenibilidad del estado actual del recurso x_0 , en el sentido de que informa sobre los niveles de las diferentes métricas u observaciones I_j que pueden garantizarse tanto hoy como en el futuro. En particular, un conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ pequeño, indica que el estado actual x_0 es vulnerable en el sentido de que hay pocas opciones para operar en el sistema en términos de su sostenibilidad. De esta forma, el conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ pretende proporcionar una imagen del estado actual del sistema, dado por x_0 , en términos de los umbrales que pueden mantenerse de forma sostenible en el tiempo. La Figura 2 muestra el conjunto de umbrales sostenibles para dos diferentes estados iniciales x_0 y x'_0 en el caso en que el espacio de umbrales es de dimensión dos. En esta imagen, teniendo $\mathcal{S}_T(t_0, x'_0) \subset \mathcal{S}_T(t_0, x_0)$, se puede inferir que el estado x'_0 está en una peor situación que x_0 .

Por otro lado, en varias aplicaciones el estado inicial x_0 suele ser conocido o al menos estimado, por lo que puede ser más fácil y práctico determinar $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ en lugar del núcleo de viabilidad completo $\mathbb{V}_T(t_0, \theta)$. Además, el conjunto de umbrales sostenibles tiene propiedades matemáticas que no comparte el núcleo de viabilidad, como ser un conjunto inferior en el sentido de que

$$\mathcal{S}_T(t_0, x_0) - \mathbb{R}_+^p = \mathcal{S}_T(t_0, x_0), \quad (7)$$

propiedad que se obtiene directamente de la definición (5), la que hace el cálculo numérico del conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ más abordable, dado que gracias a la propiedad (7), este conjunto queda completamente caracterizado por su frontera, propiedad que mencionaremos más adelante. Por lo tanto, para problemas con varias variables de estado, el cálculo de $\mathbb{V}_T(t_0, \theta)$ puede ser demasiado costoso o poco práctico en términos del tiempo computacional, incluso si solo hay pocas restricciones. Sin embargo, en la misma situación (varias variables de estado con pocas restricciones), el tiempo computacional de estimar $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ puede reducirse considerablemente porque, esencialmente, la complejidad de calcular $\mathbb{V}_T(t_0, \theta)$ y $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ es la misma, pero este último es un objeto en un espacio de menor dimensión.

Antes de terminar esta sección, veamos una propiedad de monotonía del conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$, que es útil para la identificación y aproximación del conjunto cuando se tiene horizonte infinito:

$$\mathcal{S}_T(t, x_0) \subset \mathcal{S}_T(t+1, x_0)$$

$$\mathcal{S}_{T+1}(t, x_0) \subset \mathcal{S}_T(t, x_0)$$

La demostración de estas inclusiones es directa de la definición (5) y simplemente subrayan que los umbrales que son sostenibles durante un período de tiempo, también son sostenibles durante un período más corto. De acuerdo con dicha propiedad de monotonía, se puede deducir que el conjunto de umbrales sostenibles en el caso de horizonte infinito se puede caracterizar a través de umbrales sostenibles en tiempo finito como sigue:

$$\mathcal{S}_\infty(t_0, x_0) = \bigcap_{T \geq t_0} \mathcal{S}_T(t_0, x_0)$$

En virtud de la anterior propiedad, a partir de ahora supondremos que el horizonte de tiempo T es finito.

UMBRALES SOSTENIBLES Y MAXIMIN

En esta sección, procederemos a caracterizar el conjunto de umbrales sostenibles $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ a través de problemas de optimización de tipo maximin. Si bien hay una amplia literatura matemática sobre problemas de optimización maximin, desde el punto de vista de la sostenibilidad cuantitativa, el concepto maximin fue propuesto en los años setenta Solow (1974), definiéndolo como el nivel de utilidad más alto que puede sostenerse en el tiempo, promoviendo así la equidad intergeneracional. Por lo tanto, establecer una relación entre el maximin de un problema de sostenibilidad (por definir aun) y el respectivo conjunto de umbrales sostenibles, establece un puente entre dos enfoques *a priori* diferentes, utilizados para abordar este tipo de problemas.

En primera instancia, relacionaremos al conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ con un problema maximin multicriterio. Para ello tendremos que definir qué se entiende por soluciones de este tipo de problemas, las cuales entenderemos en el sentido de Pareto. En segunda instancia caracterizaremos el conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$, como el conjunto de nivel de una función valor de un problema maximin usual (i.e., monocriterio). Dicha caracterización nos permitirá establecer un método para identificar puntos que están en la frontera de $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$, recuperando de aquella forma el conjunto completo. Los resultados matemáticos que enunciaremos para ambas partes, fueron establecidos en Doyen y Gajardo (2020) y Gajardo y Hermosilla (2021), referencias donde se pueden encontrar las demostraciones.

Antes de comenzar con las dos caracterizaciones mencionadas, definiremos los puntos de Pareto o frontera de Pareto de un conjunto. Para ello utilizaremos el concepto de dominancia en el sentido de Pareto.

Definición 1 *Dados dos vectores $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ y $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_p)$ en \mathbb{R}^p , se dice que θ está fuertemente dominado*

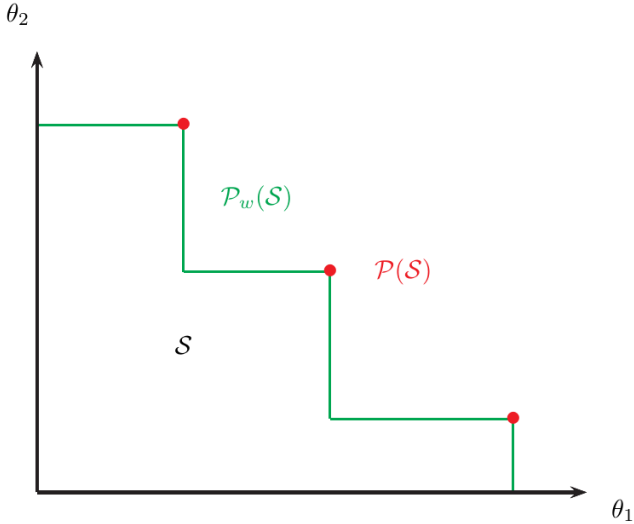


Figura 3: Ilustración de las fronteras de Pareto de un conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$. En verde se indica la frontera débil y los puntos en rojo corresponden a la frontera (fuerte).

por $\tilde{\theta}$ en el sentido de Pareto, si $\theta < \tilde{\theta}$ (componente a componente) y se dirá que está débilmente dominado en el sentido de Pareto, si $\theta \leq \tilde{\theta}$ y existe una coordenada $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\theta_j < \tilde{\theta}_j$.

Definición 2 Dado un conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^p$, su frontera de Pareto débil se define por

$$\mathcal{P}_w(\mathcal{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\theta \in \mathcal{S} \mid \nexists \tilde{\theta} \in \mathcal{S} ; \tilde{\theta} \text{ domina fuertemente a } \theta\};$$

Es decir, $\theta \in \mathcal{P}_w(\mathcal{S})$ si y solamente si $\theta \in \mathcal{S}$ y para todo $\tilde{\theta} \in \mathcal{S}$, existe una coordenada $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\theta_j \geq \tilde{\theta}_j$.

La frontera (fuerte) de Pareto de \mathcal{S} estará dada por

$$\mathcal{P}(\mathcal{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\theta \in \mathcal{S} \mid \nexists \tilde{\theta} \in \mathcal{S} \text{ tal que } \tilde{\theta} \text{ domina débil a } \theta\}.$$

En otras palabras, $\theta \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$ si y solamente si $\theta \in \mathcal{S}$ y para todo $\tilde{\theta} \in \mathcal{S}$ (diferente de θ) se tiene $\tilde{\theta} \leq \theta$ y además, existe una coordenada $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\theta_j > \tilde{\theta}_j$.

Observe que de las definiciones anteriores, se obtiene que $\mathcal{P}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{P}_w(\mathcal{S})$ para todo conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^p$. En las próximas secciones trabajaremos con las fronteras de Pareto del conjunto de umbrales sostenibles $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$.

Maximin multicriterio

El enfoque maximin usual en sostenibilidad cuantitativa - Cairns y Long (2006); Doyen y Martinet (2012); Solow (1974) -, busca maximizar el mínimo nivel en el tiempo de un beneficio I . En otras palabras, el criterio maximin define el nivel máximo de beneficio que se puede sostener en el tiempo a partir de un estado inicial x_0 . De esta forma, si el sistema dinámico controlado viene dado por

$$\begin{cases} x(t+1) = D(x(t), u(t)) & t_0 \leq t < T \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (8)$$

y un beneficio en el transcurso del tiempo está representado por la función $I : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, en cada periodo de

tiempo t se obtiene un beneficio $I(x(t), u(t))$, lo que se busca es maximizar el mínimo nivel de I a lo largo del tiempo. Esto lo escribimos como

$$V(t_0, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{(x(\cdot), u(\cdot)) \\ \text{satisfacen (8)}}} \min_{t_0 \leq t \leq T} I(x(t), u(t)),$$

donde $V(t_0, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ será la función valor maximin asociada a la métrica I . Cuando el supremo en la definición de $V(t_0, x_0)$ es alcanzado, entonces corresponde a un máximo y esta función valor tiene asociada al menos una trayectoria óptima $x^*(\cdot)$ junto a la trayectoria de controles o decisiones óptima $u^*(\cdot)$. Si el conjunto de controles $U \subset \mathbb{R}^m$ es compacto, la dinámica $D : X \times U \rightarrow X$ es continua y la función $I : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua superior, entonces se puede demostrar que el supremo en la anterior definición se alcanza, por lo que podemos remplazarlo por un máximo escribiendo

$$V(t_0, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\substack{(x(\cdot), u(\cdot)) \\ \text{satisfacen (8)}}} \min_{t_0 \leq t \leq T} I(x(t), u(t)) \quad (9)$$

El valor $V(t_0, x_0)$ tiene una interpretación simple: es el máximo valor que se puede asegurar de la métrica I en todos los periodos de tiempo (i.e., para todas las generaciones) a partir del estado inicial x_0 del sistema. Esta métrica puede representar el nivel de un recurso natural, lo que se cosecha de este, un beneficio económico, o cualquier otra medida de interés que se busque preservar a futuro.

Desde un punto de vista de la sostenibilidad, el objetivo es equilibrar no una, sino que diversas métricas relacionadas con objetivos ecológicos, económicos y sociales dentro de una perspectiva intergeneracional. Para abordar esto, estudiaremos un problema maximin multiobjetivo, en donde el problema de optimización maximin involucrará múltiples métricas I_1, \dots, I_p . En términos matemáticos, este problema lo formulamos como

$$\max_{\substack{(x(\cdot), u(\cdot)) \\ \text{satisfacen (8)}}} \left(\min_{t_0 \leq t \leq T} I_1(x(t), u(t)), \dots, \min_{t_0 \leq t \leq T} I_p(x(t), u(t)) \right) \quad (10)$$

La anterior formulación corresponde a un problema de optimización multicriterio (o multiobjetivo), dado que la función que se está maximizando tiene más de una componente. En consecuencia, es necesario establecer qué se entiende por una solución del problema de optimización (10) pues generalmente, no existe una trayectoria $(x(\cdot), u(\cdot))$ que maximice todos los criterios objetivos $\min_{t_0 \leq t \leq T} I_j(x(t), u(t))$; $j = 1, \dots, p$ de manera simultánea. Nuestro enfoque se centrará en las soluciones óptimas en el sentido de Pareto, que son soluciones que no pueden ser mejoradas en todos los criterios sin deteriorar alguno de ellos Miettinen (1999). En términos matemáticos, una trayectoria factible $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ que satisface (8) se dice que domina débilmente a otra trayectoria factible $(x(\cdot), u(\cdot))$ si $\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$

$$\min_{t_0 \leq t \leq T} I_j(x^*(t), u^*(t)) \geq \min_{t_0 \leq t \leq T} I_j(x(t), u(t)),$$

$\exists j^* \in \{1, 2, \dots, p\}$ tal que

$$\min_{t_0 \leq t \leq T} I_{j^*}(x^*(t), u^*(t)) > \min_{t_0 \leq t \leq T} I_{j^*}(x(t), u(t))$$

Una trayectoria factible $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ se denominará una solución fuerte del problema (10), en el sentido de Pareto, si no existe otra trayectoria factible que la domine débilmente. El conjunto de todas las soluciones fuertes lo denotaremos por $\mathcal{A}_m(t_0, x_0)$.

El conjunto de valores de los criterios que se están optimizando en (10) asociados a las soluciones fuertes, lo denotaremos por $\mathcal{V}_m(t_0, x_0)$ y corresponde a

$$\mathcal{V}_m(t_0, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left(\min_{t_0 \leq t \leq T} I_1(x^*(t), u^*(t)), \dots, \min_{t_0 \leq t \leq T} I_p(x^*(t), u^*(t)) \right) \mid (x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathcal{A}_m(t_0, x_0) \right\} \subset \mathbb{R}^p \quad (11)$$

Es decir, el conjunto $\mathcal{V}_m(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^p$ contiene los valores del problema (10) que se alcanzan con soluciones fuertes.

Similar a los conceptos introducidos previamente, diremos que una trayectoria factible $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ que satisface (8), domina fuertemente a otra trayectoria factible $(x(\cdot), u(\cdot))$ si

$$\min_{t_0 \leq t \leq T} I_j(x^*(t), u^*(t)) > \min_{t_0 \leq t \leq T} I_j(x(t), u(t)) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}. \quad (12)$$

Una trayectoria $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ se dirá es una solución débil del problema (10) en el sentido de Pareto, si no existe otra trayectoria factible que la domine fuertemente de acuerdo a como se define en (12). De esta forma, el conjunto de soluciones débiles lo denotaremos por $\mathcal{A}_m^w(t_0, x_0)$ y el conjunto de los valores (multicriterio) asociados a las soluciones débiles corresponderá a

$$\mathcal{V}_m^w(t_0, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left(\min_{t_0 \leq t \leq T} I_1(x^*(t), u^*(t)), \dots, \min_{t_0 \leq t \leq T} I_p(x^*(t), u^*(t)) \right) \mid (x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathcal{A}_m^w(t_0, x_0) \right\} \subset \mathbb{R}^p \quad (13)$$

De estas definiciones, directamente se deducen las siguientes inclusiones

$$\mathcal{A}_m(t_0, x_0) \subset \mathcal{A}_m^w(t_0, x_0); \quad \mathcal{V}_m(t_0, x_0) \subset \mathcal{V}_m^w(t_0, x_0),$$

enfaticando que la optimalidad fuerte de Pareto es más demandante que la optimalidad débil.

Observe que si se tiene un solo criterio ($p = 1$; $I_1 = I$), entonces $\mathcal{V}_m(t_0, x_0) = \mathcal{V}_m^w(t_0, x_0)$ y estos conjuntos contienen un solo valor, que coincidirá con $V(t_0, x_0)$ definido en (9).

Siendo (10) un problema de optimización dinámico, determinar los valores óptimos fuerte y débil en el sentido de Pareto, entregados por los conjuntos $\mathcal{V}_m(t_0, x_0)$ y $\mathcal{V}_m^w(t_0, x_0)$, presenta varios desafíos y complejidades, pues se está optimizando sobre trayectorias $(x(\cdot), u(\cdot))$ que satisfacen (8). A continuación presentaremos una caracterización de estos conjuntos, establecida como un problema de optimización multicriterio estático, es decir, que no involucra trayectorias, caracterizaciones en las cuales intervendrán el conjunto de

umbrales sostenibles $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ y el núcleo de viabilidad $\mathbb{V}_T(t_0, \theta)$ definidos por (5) y (4) respectivamente. Tales representaciones permiten interpretar las soluciones del problema maximin multicriterio (10), como un caso extremo de viabilidad.

Las caracterizaciones establecen que los valores máximos (débiles y fuertes) de Pareto del problema maximin (10), asociados a un estado x_0 , corresponden a los valores máximos (en el sentido débil y fuerte de Pareto) del conjunto de umbrales sostenibles (ver Definición 2), que también se pueden interpretar como los niveles máximos de las restricciones del sistema (3) tal que el estado actual x_0 se encuentre en el núcleo de viabilidad subyacente.

Proposición 1 Para todo estado inicial $x_0 \in X$, se tendrá

$$\mathcal{V}_m^w(t_0, x_0) = \mathcal{P}_w(\mathcal{S}_T(t_0, x_0)) = \mathcal{P}_w(\{\theta \in \mathbb{R}^p \mid x_0 \in \mathbb{V}_T(t_0, \theta)\})$$

$$\mathcal{V}_m(t_0, x_0) = \mathcal{P}(\mathcal{S}_T(t_0, x_0)) = \mathcal{P}(\{\theta \in \mathbb{R}^p \mid x_0 \in \mathbb{V}_T(t_0, \theta)\})$$

La demostración de la anterior proposición, puede encontrarse en Doyen y Gajardo (2020). Observe que las segundas igualdades en cada línea, son una consecuencia directa de la equivalencia (6), pues se tendrá la igualdad

$$\{\theta \in \mathbb{R}^p \mid x_0 \in \mathbb{V}_T(t_0, \theta)\} = \mathcal{S}_T(t_0, x_0).$$

El resultado de la Proposición 1 puede interpretarse de la siguiente forma. Sabemos que los umbrales $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ son sostenibles desde el estado inicial x_0 si pertenecen al conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$. Por lo tanto, los máximos umbrales sostenibles (i.e., la frontera de Pareto, débil o fuerte, del conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$) corresponden a los máximos niveles de las métricas, indicadores u observaciones I_j que se pueden sostener en el tiempo, al ser estos los valores óptimos del problema maximin multicriterio (10). La Proposición 1 significa también, que a partir de un estado x_0 dado, no se puede garantizar ningún umbral mayor a los valores óptimos de Pareto dados por los conjuntos $\mathcal{V}_m^w(t_0, x_0, T)$ y $\mathcal{V}_m(t_0, x_0, T)$.

Aunque la interpretación de esta proposición es bastante sencilla, tiene importantes consecuencias, pues establece que los valores óptimos del problema maximin multicriterio (10) pueden definirse en el marco de la teoría de la viabilidad, utilizando un problema de optimización multicriterio sobre el conjunto de umbrales sostenibles o sobre el núcleo de viabilidad. Aunque este método no es necesariamente más sencillo que el enfoque estándar para resolver problemas maximin, permite mostrar algunas propiedades ocultas de sus soluciones. Siempre que la solución de un problema de optimización dado pueda formularse en términos de un núcleo de viabilidad, la solución hereda las propiedades del núcleo. Dichas propiedades incluyen una estructura de programación dinámica que se utiliza para obtener aproximaciones numéricas de los valores óptimos maximin multicriterio y también de los umbrales sostenibles, como describimos más adelante.

Conjunto de nivel

En esta parte, estableceremos la relación entre el conjunto de umbrales sostenibles $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ y un problema de optimización maximin. La diferencia con la anterior sección, es que en esta ocasión el problema de optimización a considerar será monocriterio.

En primer lugar, para un estado inicial x_0 , una trayectoria de estados y controles $(x(\cdot), u(\cdot))$ que satisface el sistema (8) y un vector $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$, definimos la función

$$R_\theta(t_0, x_0, x(\cdot), u(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{t_0 \leq t \leq T} \min_{j \in \{1, \dots, p\}} (I_j(x(t), u(t)) - \theta_j)$$

Asociado a la anterior función, definimos el problema de optimización

$$W(\theta, t_0, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\substack{(x(\cdot), u(\cdot)) \\ \text{satisfacen (8)}}} R_\theta(t_0, x_0, x(\cdot), u(\cdot)), \quad (14)$$

que consiste en maximizar, sobre todas las trayectorias factibles del sistema sin restricciones (8), la función R_θ .

El siguiente resultado establece una caracterización del conjunto de umbrales sostenibles $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ en términos de un conjunto de nivel de la función $W(\theta, t_0, x_0)$.

Proposición 2 Para todo estado inicial $x_0 \in X$ se tendrá

$$\mathcal{S}_T(t_0, x_0) = \{\theta \in \mathbb{R}^p \mid W(\theta, t_0, x_0) \geq 0\}$$

Además, un vector $\theta \in \mathbb{R}^p$ pertenecerá a la frontera débil de Pareto del conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$, si y solamente si, $W(\theta, t_0, x_0) = 0$, es decir,

$$\theta \in \mathcal{P}_w(\mathcal{S}_T(t_0, x_0)) \Leftrightarrow W(\theta, t_0, x_0) = 0$$

Este resultado, establecido en Gajardo y Hermosilla (2021), entrega una herramienta para chequear si un vector de umbrales $\theta \in \mathbb{R}^p$ es o no sostenible a partir del estado inicial x_0 , que consistirá en resolver el problema (14). Más aún, la Proposición 2 nos entrega también una caracterización de la frontera de Pareto débil de $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$, como el conjunto de nivel cero de la función $W(\cdot, t_0, x_0)$. Esto tiene una considerable relevancia, dado que los vectores θ en la frontera de Pareto son los mejores (i.e., máximos) umbrales que se pueden sostener, de acuerdo con lo analizado en la sección anterior.

Por otro lado, gracias a la propiedad (7), bajo ciertas hipótesis no muy demandantes, como que el conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$ donde se encuentran los controles sea compacto, que la dinámica $D : X \times U \rightarrow X$ sea continua, y las funciones $I_j : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ sean semicontinuas superiores y acotadas inferiormente, se tendrá que (ver Gajardo y Hermosilla (2021)) el conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ queda completamente determinado a partir de sus fronteras de Pareto, mediante las igualdades

$$\mathcal{S}_T(t_0, x_0) = \mathcal{P}_w(\mathcal{S}_T(t_0, x_0)) - \mathbb{R}_+^p = \mathcal{P}(\mathcal{S}_T(t_0, x_0)) - \mathbb{R}_+^p \quad (15)$$

Las hipótesis mencionadas son bastante habituales en el modelamiento de problemas de recursos naturales o, más en

general, en el modelamiento de problemas de sostenibilidad De Lara y Doyen (2008). La compacidad del conjunto de controles U simplemente representa las limitaciones que generalmente los tomadores de decisiones suelen tener. El que las funciones I_j sean acotadas inferiormente, es bastante natural si dichas métricas representan indicadores biológicos, ecológicos, económicos o sociales que no son negativos. Una consecuencia de esta hipótesis, es que el conjunto de umbrales sostenibles nunca será vacío. De hecho, si $\underline{\theta} = (\underline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_p)$ es un vector de cotas inferiores de las funciones I_j , entonces se obtiene inmediatamente que $\underline{\theta} \in \mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ para cualquier condición inicial x_0 . Por supuesto, si $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ se reduce a $\{\underline{\theta}\} - \mathbb{R}_+^p$, entonces estamos en presencia del peor escenario para operar de forma sostenible.

En consecuencia, poder calcular alguna de las fronteras de Pareto del conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$, es suficiente para determinar el conjunto completo. El siguiente resultado, establecido en Gajardo y Hermosilla (2021), permitirá identificar de una manera directa elementos en la frontera débil $\mathcal{P}_w(\mathcal{S}_T(t_0, x_0))$.

Proposición 3 Para un estado inicial $x_0 \in X$ y un vector $\theta \in \mathbb{R}^p$, si $W(\theta, t_0, x_0) < 0$, es decir (ver la Proposición 2) $\theta \notin \mathcal{S}_T(t_0, x_0)$, entonces

$$p(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \theta + W(\theta, t_0, x_0)(1, \dots, 1) \in \mathcal{P}_w(\mathcal{S}_T(t_0, x_0)) \quad (16)$$

Lo que este resultado nos está indicando, es que si consideramos un vector $\theta \in \mathbb{R}^p$ con coordenadas suficientemente grandes de tal forma de que $\theta \notin \mathcal{S}_T(t_0, x_0)$, entonces, resolviendo el problema de optimización (14) para ese vector θ , obtendremos un vector en la frontera débil de Pareto del conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$, simplemente sumando en cada componente de θ el valor $W(\theta, t_0, x_0)$. En otras palabras, desde fuera del conjunto de umbrales sostenibles, estamos obteniendo puntos de su frontera, como se ilustra en la Figura 4.

PRINCIPIO DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

A partir de la caracterización obtenida en la sección anterior, dada por las proposiciones 2 y 3 donde interviene un problema de optimización de tipo maximin, a continuación expondremos un resultado, obtenido en Gajardo y Hermosilla (2021), que establece el principio de programación dinámica para poder encontrar el valor $W(\theta, t_0, x_0)$ definido en (14). Dicha estructura de programación dinámica proviene de la propiedad subyacente al núcleo de viabilidad en tiempo discreto, como se detalla en De Lara y Doyen (2008). A partir de dicho principio se podrá diseñar un esquema numérico para calcular el conjunto de umbrales sostenibles $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$.

Proposición 4 Para todo vector $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$ la función valor $W(\theta, \cdot, \cdot)$, definida en (14), satisface la ecuación inversa de programación dinámica

$$\begin{cases} W(\theta, T, x) = \max_{u \in U} \min_{j \in \{1, \dots, p\}} (I_j(x, u) - \theta_j) \\ W(\theta, t, x) = \max_{u \in U} \min \{ W(\theta, t+1, D(x, u, w)), \\ \min_{j \in \{1, \dots, p\}} (I_j(x, u) - \theta_j) \} \quad t = t_0, \dots, T-1 \end{cases}$$

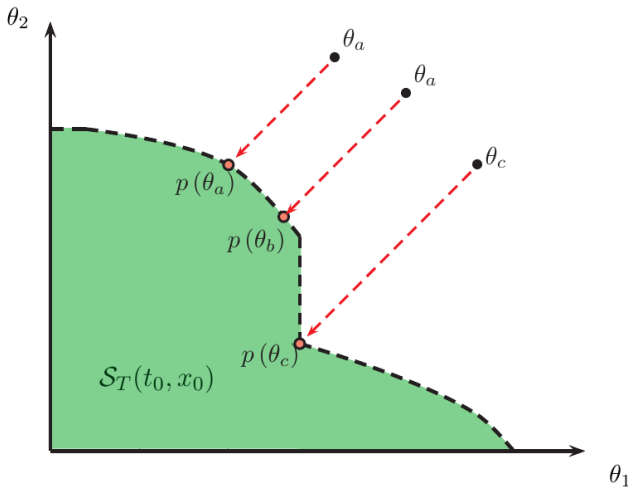


Figura 4: Ilustración tomada de Gajardo y Hermosilla (2021), de la Proposición 3 mostrando cómo utilizarla para la construcción de la frontera débil de Pareto a partir de vectores de umbrales θ_a , θ_b y θ_c que no son sostenibles cuando $p = 2$ (i.e., dos restricciones). La frontera débil de Pareto en este ejemplo se indica con la línea punteada negra.

Lo que señala el anterior principio, es que si para un vector $\theta \in \mathbb{R}^p$ y un tiempo $t + 1$ se conoce la función $W(\theta, t + 1, x)$, para todo estado $x \in X$, entonces resolviendo un problema de optimización estático (no involucra trayectorias), se puede obtener el valor de la función $W(\theta, t, x)$. Por ello se comienza resolviendo el problema desde el final ($t = T$) hacia atrás. Cada uno de estos problemas es simple de resolver, pues solo se está optimizando sobre el conjunto (compacto) de controles U en lugar de optimizar sobre un conjunto de trayectorias. Sin embargo, para poder hacer lo anterior, es necesario, en cada tiempo t , conocer el valor de la función $W(\theta, t + 1, x)$ en todo estado x . Si bien el principio de programación dinámica es muy útil para resolver problemas de optimización dinámicos, dividiéndolos en varios sub-problemas estáticos, el inconveniente es que se necesitan resolver muchos de estos subproblemas, número que crece de manera exponencial respecto al periodo de tiempo analizado $T - t_0$ y a la cantidad de variables de estado. Es por ello que en la literatura se señala que la programación dinámica sufre la *maldición de la dimensionalidad*, que la transforma en un método eficaz solo cuando el sistema considerado tiene pocas variables de estado.

De esta forma, dado un estado inicial x_0 en un tiempo inicial t_0 , para un vector de umbrales $\theta \in \mathbb{R}^p$, utilizando el esquema señalado en la Proposición 4 es posible determinar el valor $W(\theta, t_0, x_0)$. Con este valor calculado, utilizando la Proposición 3, se obtiene de inmediato un elemento en la frontera débil de Pareto del conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$, utilizando la propiedad (16). Repitiendo este procedimiento para varios vectores θ , es posible estimar la frontera débil del conjunto $\mathcal{S}_T(t_0, x_0)$ y, por lo tanto, el conjunto completo (ver igualdad (15)).

OBSERVACIONES FINALES

En la gestión de recursos naturales, problemas de conservación de la biodiversidad o cambio climático, hacer operativas las definiciones de sostenibilidad es un desafío mayor. Al respecto, el criterio maximin desempeña un papel importante como el valor máximo de alguna cantidad de interés que se puede sostener desde un punto de vista intergeneracional - Asheim (2007); Cairns y Long (2006) -. Por otro lado, son diversos los enfoques propuestos basados en restricciones y umbrales para indicadores biológicos, ecológicos, económicos o sociales, que son vistos como metas para alcanzar los objetivos de gestión sostenible. Cuando las restricciones inducidas por umbrales deben satisfacerse a lo largo del tiempo, estos problemas pueden formularse en el marco matemático de la teoría de la viabilidad, como han propuesto numerosos autores en las últimas décadas - Oubraham y Zaccour (2018) -. El enfoque de esta teoría, ha sido principalmente el cálculo o la estimación del núcleo de viabilidad, consistente en el conjunto de estados iniciales del sistema a partir de los cuales es posible satisfacer las restricciones prescritas a lo largo del tiempo. En este artículo, hemos hecho una revisión del enfoque inverso, consistente en determinar los umbrales para los que existe una trayectoria que satisface las restricciones parametrizadas por dichos umbrales. Este nuevo concepto y su cómputo proporcionan una herramienta para la gestión y visualización de múltiples objetivos relacionados con la sostenibilidad, permitiendo observar la (in)compatibilidad de múltiples objetivos y sus compensaciones.

Adicionalmente, en esta revisión se ha expuesto una extensión del enfoque maximin a un contexto multicriterio, combinando el enfoque de control viable y de optimalidad en el sentido de Pareto, mostrando los fuertes vínculos existentes entre los problemas maximin y el enfoque de la teoría de la viabilidad. En particular, se muestra cómo los valores del problema maximin son soluciones de un problema estático de optimización multicriterio, que implica al núcleo de viabilidad. En otras palabras, el maximin emerge como un óptimo de viabilidad de Pareto. Este resultado indica que las restricciones económicas, ecológicas o sociales sostenibles y las compensaciones o sinergias entre estas restricciones pueden identificarse a partir del núcleo de viabilidad y, en particular, del conjunto de umbrales sostenibles. Basándose en la estructura de programación dinámica en la que se basa el núcleo de viabilidad, en este documento se proporciona un resultado que permite diseñar algoritmos para la identificación y aproximación de los máximos de Pareto y, por tanto, de los umbrales sostenibles.

Los resultados expuestos confirman la pertinencia del enfoque de la teoría de la viabilidad para abordar problemas asociados a la sostenibilidad, considerando tanto la equidad intergeneracional como los objetivos multicriterio - Fleurbaey (2015); Doyen y Martinet (2012); Oubraham y Zaccour (2018) -. En particular, la teoría de la viabilidad identifica las decisiones que satisfacen las restricciones de sostenibilidad en el presente y mantienen la capacidad para satisfacer estas restricciones en el futuro. Desde este punto de vista, el enfoque de la viabilidad es coherente con la

definición de sostenibilidad de Brundtland - Brundtland et al. (1987) -, que caracteriza el desarrollo sostenible como un desarrollo "que satisface las necesidades del presente sin comprometer la capacidad de las generaciones futuras para satisfacer sus propias necesidades". Así, nuestros resultados aportan importantes aspectos metodológicos para la operacionalización de la sostenibilidad - Baumgartner y Quaas (2009); Neumayer (2010) -.

Concluimos este artículo mencionando que el enfoque planteado bien puede ser extendido a sistemas controlados bajo restricciones como (3), pero en tiempo continuo (ver Barrios et al. (2018)). Las herramientas para poder determinar el conjunto de umbrales sostenibles en dicho contexto, son diferentes y las que se han establecido hasta ahora se sustentan en los teoremas de comparación de trayectorias de un sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por otra parte, también se puede extender la noción a sistemas estocásticos en tiempo discreto. La noción de núcleo de viabilidad en tal contexto existe en la literatura (ver Aubin (1990); De Lara y Doyen (2008); Aubin et al. (2011)), por lo que no es difícil extender la definición de umbrales sostenibles, al menos en dos sentidos: umbrales que se pueden sostener en el tiempo con al menos un cierto nivel de probabilidad, o que se puedan sostener ante cualquier evento aleatorio futuro. Esta última opción, da pie a la definición de umbrales sostenibles robustos, concepto definido y estudiado recientemente en Gajardo et al. (2021).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Asheim, G. (2007). *Justifying, Characterizing and Indicating Sustainability*. Sustainability, Economics, and Natural Resources. Springer-Verlag, Dordrecht.
- [2] Aubin, J.-P. (1990). "A survey of viability theory". *SIAM J. Control Optim.*, 28(4):749–788.
- [3] Aubin, J.-P. (1991). *Viability theory*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA.
- [4] Aubin, J.-P., Bayen, A. M., y Saint-Pierre, P. (2011). *Viability theory*. Springer, Heidelberg, second ed. New directions.
- [5] Aubin, J.-P., Bernado, T., y Saint-Pierre, P. (2005). "A viability approach to global climate change issues". En: *The Coupling of Climate and Economic Dynamics*, pp. 113–143. Springer.
- [6] Aubin, J.-P., Chen, L., y Durand, M.-H. (2012). "Dynamical allocation method of emission rights of pollutants by viability constraints under tyochastic uncertainty". *Environmental Modeling & Assessment*, 17(1):7–18.
- [7] Barrios, E., Gajardo, P., y Vasilieva, O. (2018). "Sustainable thresholds for cooperative epidemiological models". *Mathematical Biosciences*, 302:9–18.
- [8] Baumgartner, S. y Quaas, M. F. (2009). "Ecological-economic viability as a criterion of strong sustainability under uncertainty". *Ecological Economics*, 68(7):2008–2020.
- [9] Béné, C. y Doyen, L. (2000). "Storage and viability of a fishery with resource and market dephased seasonalities". *Environmental and Resource Economics*, 15(1):1–26.
- [10] Béné, C., Doyen, L., y Gabay, D. (2001). "A viability analysis for a bio-economic model". *Ecological Economics*, 36(3):385–396.
- [11] Bernard, C. (2010). "Mathematical modelling of sustainable development: an application to the case of the rain-forest of Madagascar". En: *BIOMAT 2009*, pp. 152–166. World Sci. Publ., Hackensack, NJ.
- [12] Bernard, C. y Martin, S. (2013). "Comparing the sustainability of different action policy possibilities: application to the issue of both household survival and forest preservation in the corridor of Fianarantsoa". *Mathematical Biosciences*, 245(2):322–330.
- [13] Bonneuil, N. y Boucekkine, R. (2014). "Viable ramsey economies". *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économique*, 47(2):422–441.
- [14] Bruckner, T., Petschel-Held, G., Tóth, F., Füssel, H.-M., Helm, C., Leimbach, M., y Schellnhuber, H.-J. (1999). "Climate change decision-support and the tolerable windows approach". *Environmental Modeling and Assessment*, 4(4):217–234.
- [15] Brundtland, G., Khalid, M., Agnelli, S., Al-Athel, S., Chidzero, B., Fadika, L., Hauff, V., Lang, I., Shijun, M., de Botero, M. M., et al. (1987). "Our common future ('Brundtland report')".
- [16] Cairns, R. D. y Long, N. V. (2006). "Maximin: a direct approach to sustainability". *Environment and Development Economics*, 11(3):275–300.
- [17] Chichilnisky, G. (1996). "An axiomatic approach to sustainable development". *Social Choice and Welfare*, 13(2):231–257.
- [18] Cissé, A., Gourguet, S., Doyen, L., Blanchard, F., y Péreau, J.-C. (2013). "A bio-economic model for the ecosystem-based management of the coastal fishery in french guiana". *Environment and Development Economics*, 18(3):245–269.
- [19] De Lara, M. y Doyen, L. (2008). *Sustainable management of natural resource: mathematical models and methods*. Springer, New York.
- [20] De Lara, M., Doyen, L., Guilbaud, T., y Rochet, M.-J. (2007a). "Is a management framework based on spawning-stock biomass indicators sustainable? A viability approach." *ICES Journal of Marine Science*, 64:761–767.
- [21] De Lara, M., Doyen, L., Guilbaud, T., y Rochet, M.-J. (2007b). "Monotonicity properties for the viable control of discrete-time systems". *Systems & Control Letters*, 56(4):296–302.
- [22] De Lara, M. y Sepulveda-Salcedo, L. S. (2016). "Viable control of an epidemiological model". *Mathematical Biosciences*, 280:24–37.
- [23] Doyen, L., Armstrong, C., Baumgartner, S., Béné, C., Blanchard, F., Cissé, A., Cooper, R., Dutra, L., Eide, A., Freitas, D., Gourguet, S., Gusmao, F., Hardy, P.-Y., Jarre, A., Little, L., Macher, C., Quaas, M., Regnier, E., Sanz, N., y Thébaud, O. (2019). "From no whinge scenarios to viability tree". *Ecological Economics*, 163:183–188.
- [24] Doyen, L., Béné, C., Bertignac, M., Blanchard, F., Cissé, A. A., Dichmont, C., Gourguet, S., Guyader, O., Hardy, P.-Y., Jennings, S., Little, L. R., Macher, C., Mills, D. J., Noussair, A., Pascoe, S., Péreau, J.-C., Sanz, N., Schwarz, A.-M., Smith, T., y Thébaud, O. (2017). "Ecoviability for ecosystem-based fisheries management". *Fish and Fisheries*, 18(6):1056–1072.
- [25] Doyen, L. y Gajardo, P. (2020). "Sustainability standards, multicriteria maximin, and viability". *Nat. Resour. Model.*, 33(3):e12250, 22.
- [26] Doyen, L. y Martinet, V. (2012). "Maximin, viability and sustainability". *Journal of Economic Dynamics & Control*, 36(9):1414–1430.
- [27] Doyen, L., Thébaud, O., Béné, C., Martinet, V., Gourguet, S., Bertignac, M., Fifas, S., y Blanchard, F. (2012). "A stochastic viability approach to ecosystem-based fisheries management". *Ecological Economics*, 75:32–42.
- [28] Durand, M.-H., Désilles, A., Saint-Pierre, P., Angeon, V., y Ozier-Lafontaine, H. (2017). "Agroecological transition: a viability model to assess soil restoration". *Natural Resource Modeling*, 30(3):e12134, 29.
- [29] Eisenack, K., Scheffran, J., y Kropp, J. P. (2006). "Viability analysis of management frameworks for fisheries". *Environmental Modeling & Assessment*, 11(1):69–79.
- [30] Fleurbaey, M. (2015). "On sustainability and social welfare". *Journal of Environmental Economics and Management*, 71:34–53.
- [31] Gajardo, P. y Hermosilla, C. (2021). "Pareto fronts of the set of sustainable thresholds for constrained control systems". *Appl. Math. Optim.*, 83(2):1103–1121.
- [32] Gajardo, P., Hermosilla, C., y Picarelli, A. (2021). "On the set of robust sustainable thresholds for uncertain control systems". *arXiv*, (2101.04392).
- [33] Gajardo, P., Olivares, M., y Ramírez C., H. (2018). "Methods for the sustainable rebuilding of overexploited natural resources". *Environmental Modeling & Assessment*, 23(6):713–727.
- [34] Howarth, R. (1995). "Sustainability under uncertainty: A deontological approach". *Land Economics*, 71(4):417–427.
- [35] ICES (2004). *Report of the ICES advisory committee on fishery management and advisory committee on ecosystems, 2004*.
- [36] Krawczyk, J. B., Pharo, A., Serea, O. S., y Sinclair, S. (2013). "Computation of viability kernels: a case study of by-catch fisheries". *Computational Management Science*, 10(4):365–396.
- [37] Margolis, M. y Naevdal, E. (2008). "Climate change decision-support and the tolerable windows approach". *Environmental Resource Eco-*

- nomics*, 4(40):401.
- [38] Martinet, V. (2011). "A characterization of sustainability with indicators". *J. Environ. Econ. Manag.*, 61:183–197.
- [39] Martinet, V. y Doyen, L. (2007). "Sustainability of an economy with an exhaustible resource: A viable control approach". *Resource and Energy Economics*, 29(1):17–39.
- [40] Martinet, V., Gajardo, P., De Lara, M., y Ramírez, H. *Bargaining with Intertemporal Maximin Payoffs: Formal Problem and General Solution under Monotonicity*. title. Optimization Days 2010, CIRRELT, Montreal, Canada.
- [41] Martinet, V., Gajardo, P., De Lara, M., y Ramírez, H. (2011). "Bargaining with intertemporal maximin payoffs". *EconomiX Working Papers 2011-7, University of Paris West - Nanterre la Défense, EconomiX*.
- [42] Mathias, J.-D., Bonté, B., Cordonnier, T., y de Morogues, F. (2015). "Using the viability theory to assess the flexibility of forest managers under ecological intensification". *Environmental management*, 56(5):1170–1183.
- [43] Miettinen, K. (1999). *Nonlinear multiobjective optimization*, volumen 12 de *International Series in Operations Research & Management Science*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.
- [44] Mullon, C., Cury, P., y Shannon, L. (2004). "Viability model of trophic interactions in marine ecosystems". *Natural Resource Modeling*, 17(1):71–102.
- [45] Neumayer, E. (2010). *Weak versus Strong Sustainability: Exploring the Limits of Two Opposing Paradigms*. Edward Elgar Publishing, third ed.
- [46] Oubraham, A. y Zaccour, G. (2018). "A survey of applications of viability theory to the sustainable exploitation of renewable resources". *Ecological Economics*, 145(Supplement C):346–367.
- [47] Péreau, J.-C., Doyen, L., Little, L., y Thébaud, O. (2012). "The triple bottom line: Meeting ecological, economic and social goals with individual transferable quotas". *Journal of Environmental Economics and Management*, 63(3):419–434.
- [48] Péreau, J.-C., Mouysset, L., y Doyen, L. (2018). "Groundwater management in a food security context". *Environmental and Resource Economics*, 71(2):319–336.
- [49] Rapaport, A., Terreaux, J. P., y Doyen, L. (2006). "Viability analysis for the sustainable management of renewable resources". *Mathematical and Computer Modelling*, 43(5-6):466–484.
- [50] Rockström, J., Steffen, W., Noone, K., Persson, A., Chapin III, F. S., Lambin, E. F., Lenton, T. M., Scheffer, M., Folke, C., Schellnhuber, H. J., Nykvist, B., de Wit, C. A., Hughes, T., van der Leeuw, S., Rodhe, H., Sörlin, S., Snyder, P. K., Costanza, R., Svedin, U., Falkenmark, M., Karlberg, L., Corell, R. W., Fabry, V. J., Hansen, J., Walker, B., Liverman, D., Richardson, K., Crutzen, P., y Foley, J. A. (2009). "A safe operating space for humanity". *Nature*, 461:472–475.
- [51] Sabatier, R., Oates, L., y Jackson, R. (2015). "Management flexibility of a grassland agroecosystem: A modeling approach based on viability theory". *Agricultural Systems*, 139:76–81.
- [52] Saint-Pierre, P. (1994). "Approximation of the viability kernel". *Applied Mathematics and Optimization*, 29(2):187–209.
- [53] Schuhbauer, A. y Sumaila, U. (2016). "Economic viability and small-scale fisheries - a review". *Ecological Economics*, 124(C):69–75.
- [54] Sepulveda-Salcedo, L. S. y De Lara, M. (2019). "Robust viability analysis of a controlled epidemiological model". *Theoretical Population Biology*, 126:51–58.
- [55] Solow, R. (1974). "Intergenerational equity and exhaustible resources". *Review of Economic Studies*, 41(5):29–45.